

$$\|f'_u(., y(.), u(.) - f'_u(., x(.), v(.))\| \leq \mathcal{N}(M)\{\|y - x\| + \|u - v\|\}$$

для всех $y, x \in \mathcal{X}^\ell$, $u, v \in \mathcal{U}^s$, $\|y\|$, $\|x\|$, $\|u\|$, $\|v\| \leq M$.

F₃) $\text{rank } f'_u(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)) = m$ для п. в. $t \in \Pi$, и более того, уравнение $f'_u(., \bar{y}, \bar{u}) u = z$ разрешимо относительно $u \in \mathcal{U}^s$ для любого $z \in \mathcal{Z}^m$.

A) Для любого $\varphi \in \mathcal{Z}^{m \times \ell}$ и оператора $A_{(\varphi)}: \mathcal{Z}^m \rightarrow \mathcal{Z}^m$, определяемого формулой $A_{(\varphi)}[z] = \varphi A[z]$, спектральный радиус $\rho(A_{(\varphi)}) = 0$.

Для числа $\varepsilon > 0$ обозначим $\mathcal{D}_\varepsilon = \{u \in \mathcal{U}^s: \|u - \bar{u}\| \leq \varepsilon\}$. При сделанных предположениях справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Существует число $\varepsilon > 0$ такое, что: 1) для всякого $u \in \mathcal{D}_\varepsilon$ уравнение (1) имеет единственное решение $z = z[u]$; 2) образ множества $\mathcal{D}_\varepsilon$ при отображении $z = z[u]$ является выпуклым, и более того, строго выпуклым (то есть множество $\Xi(\mathcal{D}_\varepsilon)$ выпукло и строго выпукло); 3) граница $\partial z[\mathcal{D}_\varepsilon] = \partial \Xi(\mathcal{D}_\varepsilon)$ порождается лишь границей $\partial \mathcal{D}_\varepsilon$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Polyak B. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls // Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. Ser. A: Mathematical Analysis. 2004. V. 11. №. 2–3. P. 255–268.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

Chernov A.V. ON CONVEXITY LOCAL CONDITIONS FOR REACHABLE TUBES

For a nonlinear functional operator equation being a form of describing for a wide class of controlled initial boundary value problems, we introduce the reachable tube concept as analog of the corresponding concept from the control theory of lumped systems. We formulate local sufficient conditions for the convexity of the reachable tube of the equation under consideration.

Key words: reachable tube; convexity local conditions; functional operator equation; nonlinear distributed systems.

УДК 517.929

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ НЕАВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© К.М. Чудинов

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; устойчивость; test-уравнение.

Метод test-уравнений, применяемый для исследования асимптотических свойств решений неавтономных уравнений с последствием, до сих пор использовался только при изучении классов линейных уравнений. В работе показано применение метода к исследованию устойчивости нелинейных уравнений.

Последние несколько лет участниками Пермского семинара по функционально-дифференциальным уравнениям разрабатывается т. н. *метод test-уравнений* [1], представляющий собой совокупность имеющих общую идейную основу приемов исследования асимптотических свойств решений неавтономных уравнений с запаздывающим аргументом. До сих пор метод применялся для исследования только определенных классов линейных уравнений. Но, как показали недавние исследования [2], его можно рассматривать как разработку техники функционально-дифференциальных неравенств, которая, вообще говоря, не опирается на линейность объекта. В данной работе приводятся простейшие условия, позволяющие применить метод test-уравнений к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных уравнений. Приведены результаты, которые дает в простейшем нелинейном случае сведение задачи устойчивости тривиальных решений семейства неавтономных уравнений к изучению свойств решения конкретной автономной задачи. Подробное описание и обоснование техники такого сведения для класса линейных уравнений см. в работе [3]. Получение эффективных и неухудшаемых признаков устойчивости и неосцилляции, подобных полученным для линейных уравнений [4–6], является отдельной задачей.

Пусть в известной окрестности нуля множества $\mathbb{R}^n$ задана функция f , при этом $f(0) = 0$ и f является неубывающей по каждому аргументу. Кроме того, заданы n неотрицательных констант ω_i , $i = \overline{1, n}$. Рассмотрим семейство уравнений вида

$$\dot{x}(t) + f(x(t - r_1(t)), \dots, x(t - r_n(t))) = 0, \quad t \in [0, +\infty), \quad (1)$$

где $r_i: [0, +\infty) \rightarrow [0, \omega_i]$, $i = \overline{1, n}$, — всевозможные измеримые функции. Функцию f предполагаем такой, что решение x_φ любого уравнения из семейства (1) однозначно определяется в классе локально абсолютно непрерывных функций измеримой начальной функцией $\varphi: [-\omega, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, где $\omega = \max_i \omega_i$.

Вид (1) приобретают, например, многие популярные математические модели биологических процессов (см., напр., обзор [7]) при перенесении в начало координат точки положительного равновесия исходной модели. При этом исследователи, как правило, ограничиваются изучением моделей с постоянными запаздываниями. Случаи переменных запаздываний, как показывает, например, анализ результатов исследования конкретного типа моделей [8], остаются относительно мало изученными.

Поставим в соответствие уравнению (1) решение $y: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ задачи

$$\dot{y}(t) + f(y(t - \omega_1), \dots, y(t - \omega_n)) = 0, \quad t \in [0, +\infty); \quad y(\xi) = \alpha \neq 0, \quad \xi \in [-\omega, 0].$$

В силу условий, наложенных на функцию f , функция y монотонна (не строго) на некотором промежутке $(0, \delta)$. Определим функции $l = l(\alpha)$ и $h = h(\alpha)$ следующим образом. Если δ ограничено сверху, то для $\alpha > (<) 0$ положим $l(\alpha) = \inf\{t \in [0, +\infty) \mid \dot{y}(t) > (<) 0\}$ и $h(\alpha) = y(l(\alpha))$, $h(0) = 0$. Если функция y убывает на полуоси $[0, +\infty)$, положим $l(\alpha) = \infty$ и $h(\alpha) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$. Нетрудно показать, что в первом случае $\operatorname{sgn} h(\alpha) = -\operatorname{sgn} \alpha$, во втором $\operatorname{sgn} h(\alpha) = \operatorname{sgn} \alpha$ или $h(\alpha) = 0$.

Обозначим через h^n n -ю итерацию функции h .

Т е о р е м а 1. Пусть для некоторого $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) имеем $l(\alpha) \neq \infty$ и $|h^2(\alpha)| \leq |\alpha|$. Тогда для любого уравнения семейства (1) и любого его решения x_φ такого, что $\varphi(\xi) \in [h(\alpha), \alpha]$ ($\varphi(\xi) \in [\alpha, h(\alpha)]$), $\xi \in [-\omega, 0]$, имеем $x(t) \in [h(\alpha), \alpha]$ ($x(t) \in [\alpha, h(\alpha)]$), $t \in [0, +\infty)$.

Т е о р е м а 2. Пусть для некоторого $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) имеем $l(\alpha) \neq \infty$ и $h^n(\alpha) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого уравнения семейства (1) и любого его решения x_φ такого, что $\varphi(\xi) \in [h(\alpha), \alpha]$ ($\varphi(\xi) \in [\alpha, h(\alpha)]$), $\xi \in [-\omega, 0]$, имеем $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Т е о р е м а 3. Пусть для некоторого $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) имеем $l(\alpha) = \infty$ и $h(\alpha) > 0$. Тогда для любого уравнения семейства (1) и любого его решения x_φ такого, что $\varphi(\xi) \in [0, \alpha]$ ($\varphi(\xi) \in [\alpha, 0]$), $\xi \in [-\omega, 0]$, имеем $x(t) \in [0, \alpha]$ ($x(t) \in [\alpha, 0]$), $t \in [0, +\infty)$.

Т е о р е м а 4. Пусть для некоторого $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) имеем $l(\alpha) = \infty$ и $h(\alpha) = 0$. Тогда для любого уравнения семейства (1) и любого его решения x_φ такого, что $\varphi(\xi) \in [0, \alpha]$ ($\varphi(\xi) \in [\alpha, 0]$), $\xi \in [-\omega, 0]$, имеем $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

В случае линейной функции f значение l не зависит от α . Если $l \neq \infty$, то $h^n(\alpha) = [h(1)]^n \alpha$, поэтому выполнение неравенства $h(1) \geq -1$ ($h(1) > -1$) обеспечивает (экспоненциальную) устойчивость всех уравнений семейства. Если $l = \infty$, то $h = 0$, все уравнения семейства экспоненциально устойчивы, а их функции Коши положительны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малыгина В.В. Метод test-уравнений в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Известия ин-та математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2012. Вып. №1 (39). С. 90-91.
2. Чудинов К.М. Функционально-дифференциальные неравенства и оценка функции Коши уравнения с последействием // Изв. вузов. Математика. В печати.
3. Малыгина В.В., Чудинов К.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. I // Изв. вузов. Математика. 2013. № 6. С. 25-36.
4. Малыгина В.В., Чудинов К.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. II // Изв. вузов. Математика. 2013. № 7. С. 1-13.
5. Малыгина В.В., Чудинов К.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. III // Изв. вузов. Математика. 2013. № 8. С. 44-56.
6. Сабатулина Т.Л., Малыгина В.В. Об устойчивости линейного дифференциального уравнения с ограниченным последействием // Изв. вузов. Математика. В печати.
7. An der Heiden U., Mackey M.C. The dynamics of production and destruction: Analytic insight into complex behavior // J. Math. Biol. 1982. V. 16. P. 75-101.
8. Berezansky L., Braverman E., Idels L. Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems // Appl. Math. Model. 2010. V. 34. P. 1405-1417.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 13-01-96050).

Chudinov K.M. ESTIMATION OF ATTRACTION REGION OF TRIVIAL SOLUTION OF A NONAUTONOMOUS EQUATION WITH AFTEREFFECT

The test-equation method is developed to investigate the asymptotic properties of solutions to nonautonomous equations with aftereffect. Until now, it is applied only for the study of linear classes of equations. This work illustrates using the method for the investigation of the stability of nonlinear equations.

Key words: functional differential equation; stability; test-equation method.

УДК 517.91

ПРИЗНАК И ТИП БИФУРКАЦИИ ХОПФА В НЕГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПРИ КРАТНОМ ВЫРОЖДЕНИИ

© И.В. Шарафутдинов

Ключевые слова: бифуркация Хопфа; негладкая система; кратное вырождение; признак бифуркации.

Получен признак бифуркации Хопфа для динамической системы с негладкой правой частью, имеющей при некотором значении параметра две пары чисто мнимых собственных значений. Предложен также метод определения типа бифуркации.